

## 超越特異積分方程式法によるき裂の応力拡大係数の解析について\*

(体積力法との比較と異材問題への応用)

野田尚昭<sup>\*1</sup>, 梅木英雄<sup>\*2</sup>, Fazil ERDOGAN<sup>\*3</sup>

### The Singular Integral Equation Method in the Analysis of a Crack Perpendicular to the Interface (The Hypersingular Integral Equation Method and the Body Force Method)

Nao-Aki NODA, Hideo UMEKI, and Fazil ERDOGAN

In this paper, the plane problem of two bonded elastic half planes containing a crack perpendicular to and going through the interface is considered. The problem is formulated as a system of singular integral equations by using the stress field induced by "the displacement discontinuity". In solving the equations, the hypersingular integral equation method (HIEM) and the body force method (BFM) are compared. The calculation shows that the HIEM, in which the unknown function is approximated by the product of the weight function and chebychev polynomials, gives rapidly converging numerical results in this analysis.

**Key Words:** Elasticity, Stress Intensity Factor, Body Force Method, Composite Material, Interface, Hypersingular Integral Equation Method

#### 1. 緒 言

き裂の応力拡大係数の解析方法については、これまでに種々の数値解析が提案されているが、その中の有力な解法の一つに体積力法(Body Force Method)がある。体積方法はき裂をもつ有限板の問題をき裂のない無限板に置き換える際、体積力および食違いを連続的に作用させて与えられた境界条件を満足させる。この体積力および食違いの物理的意味は陳<sup>(1)</sup>により明確にされている。この体積力法と同じ概念から出発した特異積分方程式法は、これまで仮想境界面上に転位を分布させる方法が主であった<sup>(2)</sup>。しかし最近では転位の代わりに食違い(き裂上下面の変位差に相当)を分布させ境界条件を満足させる方法もとられるようになってきた。Ioakimidis<sup>(3)</sup>は、この方法を Hypersingular Integral Equation Method(超越特異積分方程式法)と名付け、従来の特異積分方程式法と区別している。また、Kaya-Erdogan<sup>(11)</sup>はこの積分方程式を用いてき裂問題の高精度解析が可能などを示している。そこ

で本研究では、現在さまざまな分野で構造用部材などに幅広く実用化されている複合材料の強度評価に関連して接合面を持つ無限体の問題を取り上げ、その異材境界がき裂先端の応力拡大係数に及ぼす影響を超越特異積分方程式法と体積力法(応力法)を用いて解析し両者の数値計算結果を比較した。さらに過去に行われた転位密度を未知関数とする特異積分方程式法<sup>(9)</sup>および体積力法(合力法)<sup>(7)</sup>の結果とも比較して、その計算精度を検討した。

#### 2. 超越特異積分方程式法

弾性体の内部に内圧  $p(x)$  を受ける長さ  $(b-a)$  の平面ひずみ状態のき裂が存在するとき、問題はき裂の上下面の変位差  $V(x)$  を未知関数とする次のような積分方程式で表される<sup>(11)~(14)</sup>。

$$\int_a^b \frac{V(\xi)}{(\xi-x)^2} d\xi + \int_a^b K(\xi, x) V(\xi) d\xi = -\pi \frac{1+\nu}{2G} p(x), (a < x < b). \quad (1)$$

$G$ : 横弹性係数,  $\nu=3-4\nu$ ,  $\nu$ : ポアソン比

ここで、 $\int_a^b$  は発散積分の有限部分をとることを意味し、 $K(\xi, x)$  は弾性体のき裂面以外の境界条件を満足する関数である。

\* 平成元年1月24日 第955回講演会において講演、原稿受付 平成元年3月29日。

\*1 正員、九州工業大学工学部 (804 北九州市戸畠区仙水町1-1).

\*2 学生員、九州工業大学大学院。

\*3 リーハイ大学。

式(1)は、き裂のない弾性体中に想定した仮想き裂面上に、標準形体積力対または変位食違いを分布させた場合の境界条件式に相当する<sup>(1)</sup>。したがって式(1)を基礎方程式とする超越特異積分方程式法は体積力法と本質的に等価な解析法である。

一方、従来の転位密度  $f(x)$  を未知関数とする積分方程式は次のように表される。

$$\int_a^b \frac{f(\xi)}{\xi-x} d\xi + \int_a^b k(\xi, x) f(\xi) d\xi = -\pi \frac{1+\kappa}{2G} p(x), (a < x < b) \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$\int_a^b f(\xi) d\xi = 0 \quad \dots \dots \dots (3)$$

ここで、 $\int$  はコーシーの主値をとることを意味する。

式(1)と式(2)の二つの積分方程式は部分積分により相互に変換が可能である。転位密度を未知関数とする従来の特異積分方程式法は基礎となる積分方程式[式(2)]のほかに変位の一価性条件[式(3)]を考慮する必要がある。

いま中央き裂を持つ帯板(図1)を例にとり式(1)の解法を説明する。この場合  $K(\xi, x)$  は次のようになる。

$$K(\xi, x) = \int_0^\infty f_K(\xi, x, \alpha) d\alpha \quad \dots \dots \dots (4)$$

$$f_K(\xi, x, \alpha) = (F + 2H + x\alpha G) \sinh x\alpha + (E + 2G + x\alpha H) \cosh x\alpha \quad \dots \dots \dots (5)$$

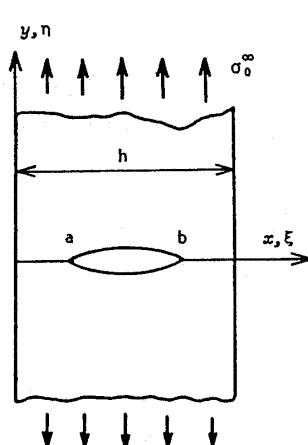


図1 中央き裂を持つ帯板の引張り

$$D = \sinh^2 \alpha h - \alpha^2 h^2, \quad E = R_1$$

$$F = \frac{1}{D} \{- [ah + \cosh ah \sinh ah] R_1 - \alpha^2 h^2 R_2 + [\sinh ah + ah \cosh ah] R_3 - ah \sinh ah R_4\}$$

$$G = \frac{1}{D} \{- \sinh^2 ah R_1 + [ah - \cosh ah \sinh ah] R_2 + ah \sinh ah R_3 + [\sinh ah - ah \cosh ah] R_4\}$$

$$H = \frac{1}{D} \{ [ah + \cosh ah \sinh ah] R_1 + \sinh^2 ah R_4 - [\sinh ah + ah \sinh ah] R_3 + ah \sinh ah R_4\}$$

$$\dots \dots \dots (6)$$

$$R_1 = -(1 - \xi \alpha) de^{-\xi \alpha}$$

$$R_2 = -(2 - \xi \alpha) \alpha e^{-\xi \alpha}$$

$$R_3 = -(1 - (h - \xi) \alpha) \alpha e^{-\alpha(h-\xi)}$$

$$R_4 = \{2 - (h - \xi) \alpha\} \alpha e^{-\alpha(h-\xi)}$$

積分範囲を  $-1 \sim 1$  までとするため、変数  $r, s$  を次のように定義する。

$$r = \frac{2\xi - (b+a)}{b-a}, \quad s = \frac{2x - (b+a)}{b-a}$$

$$f(r) = \frac{2}{b-a} V(\xi) \quad \dots \dots \dots (8)$$

式(1)は次のように書き直される。

$$\int_{-1}^1 \frac{f(r)}{(r-s)^2} dr + \int_{-1}^1 k(r, s) f(r) dr = g(s)$$

$$(-1 < s < 1) \dots \dots \dots (9)$$

ここで

$$k(r, s) = \left( \frac{b-a}{2} \right)^2 K(\xi, x), \quad g(s) = -\pi \left( \frac{1+\kappa}{2G} \right) \sigma_0^\infty \quad \dots \dots \dots (10)$$

超越特異積分方程式法では  $f(r)$  を次のように基本密度関数  $\sqrt{1-r^2}$  と Chebychev の多項式の積で近似する。

$$f(r) = F(r) \sqrt{1-r^2}, \quad F(r) \cong \sum_{n=0}^{N-1} a_n U_n(r) \quad \dots \dots \dots (11)$$

そして、特異性を含む項は式(12)の積分公式を利用すると、式(9)の積分方程式は係数  $a_n$  についての  $N$  元の連立方程式[式(13)]となる。

表1 帯板中の中央き裂の無次元化応力拡大係数  $F_1$   
[ $F_1 = k_1 / \sigma_0^\infty \sqrt{a}$ ,  $\lambda = 2a/h$ ]

$\lambda$	Present analysis	Ishida	
0.1	1.0060	1.0060	
0.2	1.0246	1.0246	
0.3	1.0577	1.0577	
0.4	1.1093	1.1094	
0.5	1.1866	1.1867	
0.6	1.3032	1.3033	
0.7	1.4883	1.4882	

$$\int_{-1}^1 \frac{U_n(r)\sqrt{1-r^2}}{(r-s)^2} dr = -\pi(n+1)U_n(s) \quad \dots\dots\dots(12)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} a_n [-\pi(n+1)U_n(s) + h_n(s)] = g(s) \quad (-1 < s < 1) \dots\dots\dots(13)$$

$$h_n(s) = \int_{-1}^1 U_n(r) k(r, s) \sqrt{1-r^2} dr \quad \dots\dots\dots(14)$$

境界条件を満足させる点は式(15)で与えられる。

$$s_j = \cos\left(\frac{2j+1}{N}\frac{\pi}{2}\right), \quad j=0, 1, \dots, N-1 \quad \dots\dots\dots(15)$$

応力拡大係数  $k_1(a)$  は次のように定義される [ $k_1(b)$  も同様]。

$$k_1(a) = \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{2(a-x)} \sigma_y(x, 0) \quad (x < a)$$

$$= \frac{2G_1}{x+1} \sqrt{\frac{b-a}{2}} F(-1) \quad \dots\dots\dots(16)$$

以上の解法により帯板の中央き裂先端の無次元化応力拡大係数を求め、石田の解<sup>(10)</sup>と比較して表 1 に示す。表 1 に示すように  $N=4 \sim 8$  程度で有効数字 5 けたの精度が得られることがわかる。

### 3. 異材境界き裂問題への応用

#### 3・1 異材境界を含む無限板中に存在する単位食違

$$\sigma_{y1} = \frac{G_1}{2\pi(\kappa_1-1)} \left[ \left[ \frac{3+\kappa_1^2}{1+\kappa_1} \frac{2}{r_1^2} - \frac{2}{1+\kappa_1} [-(\kappa_1^2-2\kappa_1+5)x_1^2 - (\kappa_1^2+6\kappa_1-3)y_1^2] \frac{1}{r_1^4} + 32 \frac{-1+\kappa_1}{1+\kappa_1} \frac{x_1^2 y_1^2}{r_1^6} \right. \right. \\ \left. \left. + \left[ 3A\kappa_1 + B - \frac{3-\kappa_1}{1+\kappa_1} [A(3\kappa_1-2)-B] \right] \frac{1}{r_1^2} + 2 \left[ 2A(2\xi^2 - (5-\kappa_1)x_2\xi - \kappa_1 x_2^2) - (3A\kappa_1 + B)y_1^2 \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{3-\kappa_1}{1+\kappa_1} [x_2 \{2A(\kappa_1-1)\xi + (A\kappa_1-B)x_2\} - 2A((4x+6\xi)\xi + 7y_1^2)] \right] \frac{1}{r_1^4} \right. \\ \left. + 16A \left[ 2x_2\xi x_2^2 - y_1^2(2\xi^2 - (5-\kappa_1)x_2\xi - \kappa_1 x_2^2) + \frac{3-\kappa_1}{1+\kappa_1} [2y_1^2(x_2\xi + y_1^2) \right. \right. \\ \left. \left. + x_2 \{2x_2\xi^2 + (7\xi + \kappa_1 x_2)\xi + 2y_1^2\xi(x+2\xi)\}] \right] \frac{1}{r_1^6} - 192Ax_2y_1^2\xi \left\{ x_2x + \frac{3-\kappa_1}{1+\kappa_1} (x_2\xi + y_1^2) \right\} \frac{1}{r_1^8} \right] \quad \dots\dots\dots(17)$$

$$\sigma_{y2} = \frac{G_1}{2\pi(\kappa_1-1)} \left[ \left[ \left[ (1-A)\kappa_1 + 3(1-B) + \frac{3-\kappa_1}{1+\kappa_1} [\kappa_1(A-1) + 2A - 3B + 1] \right] \frac{1}{r_1^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \left[ 4x_1 \{(1-A)\xi + (B-1)x\} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + 2y_1^2 \{\kappa_1(A-1) + 3(B-1)\} + \frac{3-\kappa_1}{1+\kappa_1} [4(1-A)y_1^2 + 2x_2 \{2(A-B)\xi + ((1-A)\kappa_1 + B-1)x_1\}] \right] \right] \frac{1}{r_1^4} \right. \\ \left. - 32 \frac{-1+\kappa_1}{1+\kappa_1} x_1 y_1^2 \{(1-A)\xi + (B-1)x\} \frac{1}{r_1^6} \right] \quad \dots\dots\dots(18)$$

ここで、上式中の  $x_1, x_2, y_1, r_1, r_2$  は次式で定義される。

$$x_1 = x - \xi, \quad x_2 = x + \xi, \quad y_1 = y - \eta, \quad r_1^2 = x_1^2 + y_1^2, \quad r_2^2 = x_2^2 + y_1^2 \quad \dots\dots\dots(19)$$

また、 $x_i, A, B, \Gamma$  は次式となる。

$$\kappa_i = 3 - 4\nu_i, \quad (i=1, 2) \text{ (平面ひずみ)}, \quad A = \frac{1-\Gamma}{\Gamma\kappa_1-1}, \quad B = \frac{\kappa_2-\Gamma\kappa_1}{\Gamma-K_2}, \quad \Gamma = G_2/G_1 \quad \dots\dots\dots(20)$$

単位食違が材料 2 中にある場合は、式(17)から(20)中の  $\kappa_1$  を  $\kappa_2$  に、 $x_2$  を  $x_1$  に、 $\Gamma$  を  $1/\Gamma$  に置き代えればよい。

**3・2 超越特異積分方程式法の解法** 橫弾性係数およびポアソン比  $(G_1, \nu_1), (G_2, \nu_2)$  の半無限板が図 3 に示すように直線で理想的に接合されているとする。この無限板の内部にき裂が異材境界に対して垂直に発生し接合面を

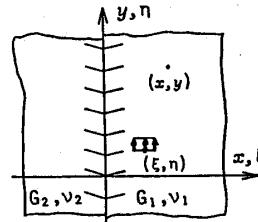


図 2 異材境界を含む無限板中の単位食違

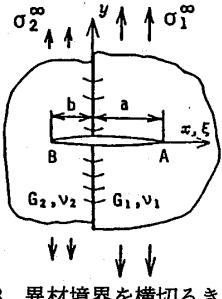


図 3 異材境界を横切るき裂 ( $\Gamma = G_2/G_1$ )

いによる応力場 本解析では、Hetyenyi ら<sup>(4)</sup>の解法を基本として異材境界を含む連続な無限板中に作用する単位食違により生じる応力場を求め、それを基本解とした。この基本解は閉じた形で与えられているので数値計算上便利であり、異なる解法による計算結果を比較検討する場合に都合がよい。図 2 に示すように  $y$  方向の単位食違のみが材料 1 中の着力点  $(\xi, \eta)$  に作用した場合、注目点  $(x, y)$  の応力  $\sigma_y$  を式(17), (18) に示す。紙面の都合により  $\sigma_y$  と  $\tau_{xy}$  の表示は省略する。添字 1, 2 は注目点の領域を表す。

横切り遠方で一様引張応力  $\sigma_1^\infty$ ,  $\sigma_2^\infty$  が作用した場合を解析する。このとき  $\varepsilon_{y1}^\infty = \varepsilon_{y2}^\infty$  の関係から  $\sigma_1^\infty$ ,  $\sigma_2^\infty$  の間には次の関係がなければならない。

重ね合わせの原理により、き裂を持つ無限体をき裂のない無限体に置き換えると問題は仮想き裂面 ( $x = \xi$ ) に分布された食違い密度  $V_i(\xi)$  を未知関数とする次の特異積分方程式に帰着される。

$$\int_{-b}^0 \frac{V_2(\xi)}{(\xi-x)^2} d\xi + \int_{-b}^0 K_{22}(\xi, x) V_2(\xi) d\xi + \int_0^a K_{21}(\xi, x) V_1(\xi) d\xi = -\pi \frac{1+\kappa_2}{2G_2} \sigma_2^\infty, \quad (-b < x < 0) \dots \dots \dots (23)$$

ここで,  $K_{ij}(\xi, x)$ , ( $i, j = 1, 2$ ) は次のように表される.

$$K_{11}(\xi, x) = \sum_{k=1}^3 \frac{C_{1k}x^{k-1}}{(\xi+x)^{k+1}}, \quad K_{22}(\xi, x) = \sum_{k=1}^3 \frac{C_{2k}x^{k-1}}{(\xi+x)^{k+1}}, \quad K_{12}(\xi, x) = \sum_{k=1}^2 \frac{d_{1k}x^{k-1}}{(\xi-x)^{k+1}}, \quad K_{21}(\xi, x) = \sum_{k=1}^2 \frac{d_{2k}x^{k-1}}{(\xi-x)^{k+1}}$$

.....(24)

$$\left. \begin{aligned} C_{11} &= \frac{1}{2} - \frac{\Gamma(1+\kappa_1)}{2(\Gamma+\kappa_2)} - \frac{3(1-\Gamma)}{2(1+\Gamma\kappa_1)}, \quad C_{12} = 12 \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma\kappa_1}, \quad C_{13} = -12 \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma\kappa_1} \\ C_{21} &= -\frac{1}{2} + \frac{1+\kappa^2}{2(1+\Gamma\kappa_1)} + \frac{3(\Gamma-1)}{2(\Gamma+\kappa_2)}, \quad C_{22} = 12 \frac{1-\Gamma}{\Gamma+\kappa_2}, \quad C_{23} = -12 \frac{1-\Gamma}{\Gamma+\kappa_2} \\ d_{11} &= \Gamma \frac{1+\kappa_1}{1+\kappa_2} \left\{ 1 + \frac{\Gamma-1}{2(\Gamma+\kappa_2)} - \frac{3(\Gamma\kappa_1-\kappa_2)}{2(1+\Gamma\kappa_1)} \right\}, \quad d_{12} = 2\Gamma \frac{1+\kappa_1}{1+\kappa_2} \left\{ \frac{\Gamma\kappa_1-\kappa_2}{1+\Gamma\kappa_1} - \frac{\Gamma-1}{\Gamma+\kappa_2} \right\} \\ d_{21} &= \frac{1+\kappa_2}{\Gamma(1+\kappa_1)} \left\{ 1 + \frac{1-\Gamma}{2(1+\Gamma\kappa_1)} - \frac{3(\kappa_2-\Gamma\kappa_1)}{2(\Gamma+\kappa_2)} \right\}, \quad d_{22} = \frac{2(1+\kappa_2)}{\Gamma(1+\kappa_1)} \left\{ \frac{\kappa_2-\Gamma\kappa_1}{\Gamma+\kappa_2} - \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma\kappa_2} \right\} \end{aligned} \right\} \dots \quad (25)$$

境界条件を満足する点  $x$  は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos\left(\frac{2J}{2N_1+1}\frac{\pi}{2}\right), \quad J=1,2,\dots,N_1, (0 < x < a) \\ x &= -b \cos\left(\frac{2(J-N_1)}{2N_2+1}\frac{\pi}{2}\right), \quad J=N_1+1, \dots, N_1+N_2, \quad (-b < x < 0) \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (26)$$

変数( $r, s$ )を次のように定義する。

$r, s$  を用いれば式(22), (23)は次のように書き直される.

ここで

式(12)の公式を利用するため式(28), (29)を次のように変形する。

$$\int_{-1}^1 \frac{f_1(r)}{(r-s)^2} dr - \int_{-1}^{-c} \frac{f_1(r)}{(r-s)^2} dr + \int_{-c}^1 k_{11}(r, s) f_1(r) dr + \int_{-1}^{-c} k_{12}(r, s) f_2(r) dr = q_1(s), \quad (-c < s < 1) \quad (32)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{f_2(r)}{(r-s)^2} dr - \int_{-c}^1 \frac{f_2(r)}{(r-s)^2} dr + \int_{-1}^{-c} k_{22}(r, s) f_2(r) dr + \int_{-c}^1 k_{21}(r, s) f_1(r) dr = q_2(s), \quad (-1 < s < -c) \quad \dots \quad (33)$$

前節の問題と同様に  $f_i(r)$  を次のように基本密度関数  $\sqrt{1-r^2}$  と Chebychev の多項式の積で近似する。

式(32), (33)は、式(35), (36)の( $N_1 + N_2$ )元の連立方程式となり、問題は  $a_{1n}$ ( $i=1,2$ )を解くことに帰する。

$$\left. \begin{aligned} A_n(s) &= - \int_{-1}^{-c} \frac{U_n(r)\sqrt{1-r^2}}{(r-s)^2} dr + \int_{-c}^1 U_n(r)k_{11}(r,s)\sqrt{1-r^2} dr \\ B_n(s) &= \int_{-1}^{-c} U_n(r)k_{12}(r,s)\sqrt{1-r^2} dr, \quad C_n(s) = \int_{-c}^1 U_n(r)k_{21}(r,s)\sqrt{1-r^2} dr \\ D_n(s) &= - \int_{-c}^1 \frac{U_n(r)\sqrt{1-r^2}}{(r-s)^2} dr + \int_{-1}^{-c} U_n(r)k_{22}(r,s)\sqrt{1-r^2} dr \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

図3の問題は、これまでにErdoganら<sup>(9)</sup>により転位密度を未知関数とする特異積分方程式法で解析されている。そこで、その解析結果との比較も行う。

### 3・3 体積力法の解法 体積力法については西谷

ら<sup>(5)</sup>により多くの研究報告がなされており原理については詳しく解説されている<sup>(1)</sup>ので、ここでは超越特異積分方程式法との離散化の相違のみ示すことにする。体積力法では、き裂長さ  $a$  および  $b$  をそれぞれ  $n_1$ ,  $n_2$  等分割して、分割した各区間で一定値をとる階段関数と基本密度関数  $\sqrt{l^2 - \xi^2}$  の積 [ $l = (a+b)/2$ ] で食違い密度を近似する。すなわち式(22), (23)の  $V_1(\xi)$ ,  $V_2(\xi)$  は次式で表される。

$$V_i(\xi) = t_j \sqrt{l^2 - \xi^2}, \quad (i=1,2, \quad J=1,2 \cdots n_1 + n_2) \quad \dots \dots \dots \quad (38)$$

$t_J$ : 分割された区間  $J$  で一定値をとる階段関数

境界条件を満足させる点  $x$  は分割区間の中点とする。

表 2 半無限板の縁き裂の無次元化応力拡大係数  
[ $F_A = k_1 / \sigma^\infty \sqrt{a}$ ]

		F <sub>A</sub>		
N	H I E M	N	B F M	
6	1.121610			
10	1.121853	64	1.120199	
15	1.121582	96	1.120605	
20	1.121537	128	1.120815	
28	1.121522			
30	1.121522	( 96-64 )	1.121416	
:		( 128-96 )	1.121446	
100	1.121522			
Koiter	1.121522			

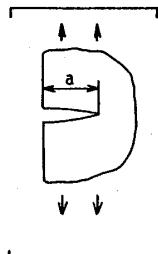
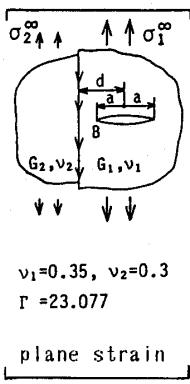


表 3 接合板の内部き裂の無次元化応力拡大係数  
 $[F_B = k_1 / \sigma_1^\infty \sqrt{a}]$

FB					
d/a	N	H I E M	N	B F M	
1.1	18	0.6673266	24	0.6709931	
	19	0.6673373	32	0.6696704	
	20	0.6673435	48	0.6685674 (32-24) 0.6657022 (48-32) 0.6663615	
	Isida	0.6671			
	Cook	0.6674			
FB					
d/a	N	H I E M	N	B F M	
2.0	8	0.9349273	24	0.9352701	
	9	0.9349278	32	0.9351619	
	10	0.9349280	48	0.9350628 (32-24) 0.9348373 (48-32) 0.9348646	
	Isida	0.9349			
	Cook	0.9349			



$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{a}{n_1} \left( J - \frac{1}{2} \right), \quad (J=1, 2, \dots, n_1), \quad (0 < x < a) \\ x &= \frac{b}{n_2} \left( J - n_1 - \frac{1}{2} \right) - b, \quad (J=1+n_1, \dots, n_1+n_2), \\ &\quad (-b < x < 0) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (39)$$

このようにすれば問題は  $t_1$  を未知関数とする ( $n_1 + n_2$ ) 元の連立方程式を解くことに帰する。得られる応力拡大係数は、分割数の逆数にほぼ比例する誤差を含むので、分割数が無限大の場合を外挿によって求め る。

体積力法を用いた図3の問題の解析は過去に北川ら<sup>(15)</sup>、石田ら<sup>(7)</sup>により行われている。石田らの解法は未知関数を基本密度関数と折れ線関数の積で近似し区間の合力で境界条件を満足させる合力法を用いて精度を高めている。そこで、その解析結果との比較も行う。

表 4 接面を横切るき裂の無次元化応力拡大係数(図3)  
 $[F_A = k_1/\sigma_1^* \sqrt{l}, F_B = k_2/\sigma_2^* \sqrt{l}, l = (a+b)/2]$   
 $(b/a = 0.25, \nu_1 = \nu_2 = 0.3, \text{plane stress})$

T	F <sub>A</sub>			F <sub>B</sub>		
	Present analysis		Isida	Present analysis		Isida
	H	I		E	M	
0.1	1.251	1.249	1.249	1.875	1.867	1.861
0.2	1.169	1.168	1.168	1.564	1.558	1.556
0.3	1.120	1.119	1.119	1.386	1.384	1.382
0.4	1.087	1.086	1.086	1.274	1.272	1.271
0.5	1.063	1.062	1.062	1.195	1.193	1.192
0.6	1.044	1.044	1.044	1.136	1.135	1.134
0.8	1.018	1.018	1.018	1.054	1.054	1.054

表 5 接合面を横切るき裂の無次元化応力拡大係数(図3)  
 $[F_A = k_1/\sigma_1^{\infty} \sqrt{t}, F_B = k_2/\sigma_2^{\infty} \sqrt{t}, l = (a+b)/2]$   
 $(\Gamma = 0.0429, \nu_1 = 0.3, \nu_2 = 0.35, \text{plane strain})$

b/a	F <sub>A</sub>				F <sub>B</sub>			
	Present analysis			Erdogan	Present analysis			Erdogan
	H	I	M		B	F	M	
0.25	1.334	1.332	1.33240		2.090	2.079	2.13917	
0.50	1.238	1.237	1.23789		1.522	1.518	1.55615	
0.75	1.159	1.158	1.15887		1.286	1.285	1.31166	
1.00	1.093	1.092	1.09312		1.159	1.158	1.17874	
1.25	1.037	1.037	1.03767		1.081	1.081	1.09693	
1.50	0.990	0.990	0.99020		1.029	1.029	1.04261	
1.75	0.949	0.949	0.94902		0.993	0.993	1.00462	
2.00	0.913	0.913	0.91286		0.967	0.967	0.97701	

#### 4. 計算結果および考察

はじめに  $\Gamma=0$  として半無限板の縁き裂の解析を行い Koiter の解<sup>(6)</sup>と比較した結果を表 2 に示す。超越特異積分方程式法(HIEM)は選点数  $N=28$  で有効数字 7 けたの精度が得られた。比較のため未知関数  $F_i(\gamma)$  を階段関数で近似した場合 [体積力法(BFM)] の結果も示している。表 2 の(96-64)は  $N=96$  と  $N=64$  からの外挿を意味する(他も同様である)。超越特異積分方程式法ではき裂面上に分布させる未知関数を Chebychev 多項式を用いた高次関数で近似することによって少ない選点数で高い精度が得られることがわかる。

次に異材境界を持つ無限板の内部き裂の解析を行い  $\Gamma=23.077$ ,  $\nu_1=0.3$ ,  $\nu_2=0.35$  (平面ひずみ)として石田ら<sup>(7)</sup>, Cook ら<sup>(8)</sup>の解と比較して表 3 に示した。内部き裂についても超越特異積分方程式法は選点数  $N=20$  程度で十分な精度が得られた。

さらにき裂が異材境界を垂直に横切った場合の解析を行った。き裂長さ比  $a/b=0.25$ , ポアソン比  $\nu_1=\nu_2=0.3$  (平面応力)として  $\Gamma=0.1 \sim 0.8$  について無次元値  $F_A$ ,  $F_B$  を石田の解<sup>(7)</sup>と比較して表 4 に示す。石田の体積力法による解析では、分布させる未知関数を折れ線関数(1 次関数)で近似し、境界条件として区間の合力が零となる条件を用いている。そして領域 1, 2 の各部分のき裂の分割数をそれぞれ 30, 35 ( $N=60, 70$ ) として分割数無限大の場合を外挿している。一方、本解析の HIEM の結果は各領域 1, 2 の多項式の次数が 15~20 ( $N=30 \sim 40$ ) の範囲で決定した。また、本解析の BFM の結果は選点数  $N=48, 64, 96$  としてその外挿値より決定した。表 4 で 3 種類の異なる解法による結果はよく一致している。

また表 5 は同じ場合を  $\Gamma=0.0429$ ,  $\nu_1=0.3$ ,  $\nu_2=0.35$  (平面ひずみ)として  $b/a=0.25 \sim 2.0$  の範囲で無次元値  $F_A$ ,  $F_B$  を Erdogan ら<sup>(9)</sup>の解と比較したものである。表 5 より  $F_A$  の値は、3 法とも一致しているのに対して  $F_B$  の値は本解析結果と Erdogan らの解とに 2 % 程度の差があることがわかる。

#### 5. 結 言

本研究では、異材境界を横切るき裂問題を取り上げ超越特異積分方程式法と体積力法を用いて解析し、両者の数値計算結果を比較するとともに過去の研究結果との比較も行った。結果をまとめると以下のようにな

る。

(1) 超越特異積分方程式法と体積力法は同一の積分方程式を基礎方程式とする意味で本質的に等価な解析法である。超越特異積分方程式 [式(1)] と従来の転位密度を未知関数とする特異積分方程式 [式(2)] とは部分積分を用いて相互に変換が可能である。超越特異積分方程式法では変位の一価性条件 [式(3)] を考慮する必要がない。

(2) 未知関数である食違密度を基本密度関数と Chebychev 多項式の積で近似する超越特異積分方程式法の手法は、基本密度関数と階段関数(または折れ線関数)を用いる体積力法(応力法および合力法)に比べて少ない選点数で高精度の結果を与える。したがって弾性体のき裂面以外の境界条件を満足する基本解が得られる場合、超越特異積分方程式法は有力な解析法である。

(3) 異材境界を横切る無限板中のき裂の解析を行った結果、石田の体積力法(合力法)による結果は本解析とほぼ一致したが、Erdogan らの転位密度を未知関数とする特異積分方程式法による結果は 2 % 程度の誤差が認められた。

本研究の一部は著者らの一人が文部省在外研究員としてリーハイ大学滞在中に行われたものであることを記し感謝の意を表す。

#### 文 献

- (1) 西谷・陳、体積力法、(1987), 9, 培風館。
- (2) Bueckner, H. F. (Sih, G. C. 編), *Method of Analysis and Solutions of Crack Problems*, (1973), 239, Noordhoff Int. Pub.
- (3) Ioakimidis, N. I., *Eng. Fract. Mech.*, 26-5(1987), 783.
- (4) Dundurs, J. and Hetenyi, M., *J. Appl. Mech.*, 28(1961), 103.
- (5) 西谷、機論, 41-344(1975), 1103.
- (6) Koiter, W. T., *J. Appl. Mech.*, 32(1965), 237.
- (7) 石田・野口、機論, 49-437, A(1983), 36.
- (8) Cook, T. S. and Erdogan, F., *Int. J. Eng. Sci.*, 10(1972), 677.
- (9) Erdogan, F. and Biricikoglu, V., *Int. J. Eng. Sci.*, 11(1973), 745.
- (10) 石田、き裂の弾性解析と応力拡大係数、(1976), 145, 培風館。
- (11) Kaya, A. C. and Erdogan, F., *Q. Appl. Math.*, 45-1(1987), 105.
- (12) Ioakimidis, N. I., *Acta Mech.*, 45(1982), 31.
- (13) 高久田、機論, 50-454, A(1984), 183.
- (14) 日本機械学会編、固体力学におけるコンピュータアリシス、(1986), 108, コロナ社。
- (15) 北川、結城、神原、機論, 45-397, A(1979), 1024.